

A hiperbolikus geometria alkalmazása a relativisztikus sebességek összeadásában

Boros Béla

1. Bevezetés

Írásunk első része a hiperbolikus síkon a Weierstrass-féle koordináták felhasználásával megkonstruált kommutatív csoporttal foglalkozik. Ebből a struktúrából egy paraméter megváltoztatásával, majd izomorfizmussal és a lineáris algebra eszközeivel az euklidészi tér egy c sugarú nyílt gömbjében kötött vektorok kommutatív csoportját határozzuk meg (c a fény vákuumbeli sebessége). Végül a számítástechnika eszközeivel vizuálisan is összehasonlítjuk egy tetszőlegesen kiválasztott, megengedett¹ sebességpáron az általunk kapott összeadás és az Einstein-féle összeadás eredményeit.

Kevés esetben ismerjük meg az előre vivő ötletek valódi forrását. Sokszor csak Deus ex machina definíciókban jelennek meg. Ezzel ellentétben írásunk vezérfonala a következő: a komplex számok algebrailag rendezett pároknak, geometriailag a komplex számsíkban pontoknak, de a pontok helyzetvektoraiként vektoroknak is tekinthetők. Ha pontoknak tekintjük ezeket, akkor pontthalmaz feletti binér műveletről és párhuzamosan ekvivalens algebrai háttérrel van szó, ami egy Abel-csoportot alkot. Hasonlóan járhatunk el a hiperbolikus síkon is. Szász Pál művéből² néhány tételt axiómának vagy definíciónak kiemelve (ez sokszor elfogadott, ugyanakkor vitatott módszer is) a hiperbolikus sík pontjaihoz algebrai háttérként azok Weierstrass-koordinátáit, az egyenesekhez azok vonalkoordinátáit rendeljük, és felhasználjuk a távolságvonalegyenletét, valamint kiválasztunk egy rögzített pontot.

2. Abel-csoport a hiperbolikus sík pontthalmazán

Jelöljük a hiperbolikus sík pontjait nagy betűkkel és definiáljuk azokat Weierstrass-féle koordinátáikkal:

$$(1) X(x_1, x_2, x_3) \text{ ahol } x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1 \text{ és } x_3 > 0$$

¹ A megengedett sebesség a háromdimenziós euklidészi tér Oxyz koordináta rendszerének középponti helyzetű c sugarú nyílt gömbjének origó kezdőpontú bármelyik vektora

² Szász Pál (1973): *Bevezetés a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometriába*. Budapest, Akadémiai Kiadó.

Az egyeneseket kis betűkkel jelöljük és Weierstrass-féle koordinátaival definiáljuk.

$$(2) u[u_1, u_2, u_3] \text{ ahol } u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = 1$$

Az X pont illeszkedését az u egyeneshez a következő definíció adja meg:

$$(3) X \in u \leftrightarrow u_1 x_1 + u_2 x_2 - u_3 x_3 = 0$$

Az X pont és az u egyenes távolsága:

$$(4) d(X, u) = t \leftrightarrow u_1 x_1 + u_2 x_2 - u_3 x_3 = sht$$

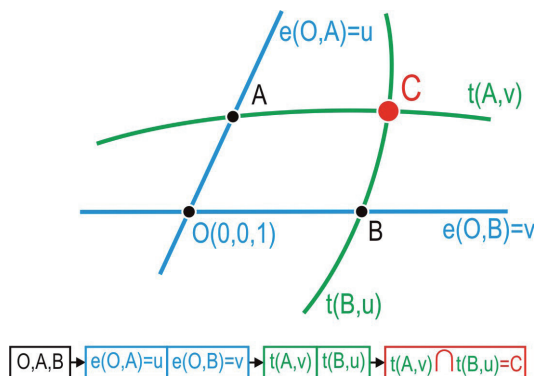
Ebből következik, hogy az $u[u_1, u_2, u_3]$ alapegyenesű és t távolságú távolságvonál egyenlete:

$$(5) u_1 x_1 + u_2 x_2 - u_3 x_3 = sht$$

Egy kiválasztott pontot O -val jelölünk, és ez az egyszerűség kedvéért ez az $O(0, 0, 1)$ pont.

Ebben a modellben eljárásunk a következő. Adottak az $O(0, 0, 1)$, $A(a_1, a_2, a_3)$ és $B(b_1, b_2, b_3)$ egymástól páronként különböző pontok. O rögzített, A és B két tetszőleges pont.

Az O és az A pontok $e(O, A) = u[u_1, u_2, u_3]$ egyenest határozzák meg (3) valamint (2) alapján.



1. ábra

A művelet ábrája

Forrás: a szerző szerkesztése

- O az $O(0,0,1)$ kiválasztott pont,
- O, A, B páronként különböző adott pontok,
- $e(O, A)$ az O és A pontokhoz illeszkedő egyenes,
- $t(B, u)$ az u alapegyenesű a B ponton áthaladó távolságvonal.

Definíció: $A \oplus B = C$

$$(6) A \in u: a_1 u_1 + a_2 u_2 - a_3 u_3 = 0 \quad (3)$$

$$O \in u: -u_3 = 0 \quad (3)$$

$$u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = 1 \quad (2) \quad u[u_1, u_2, u_3] \text{ egyenes.}$$

Az egyenletrendszer ekvivalens az

$$(7) \quad a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0 \\ u_1^2 - u_2^2 = 1$$

egyenletrendszerrel, amelynek megoldásai

$$(8) \quad u_1 = -\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}; \quad u_2 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}; \quad u_3 = 0$$

Hasonlóan az O és a B pontok az $e(O, B) = v[v_1, v_2, v_3]$ egyenest határozzák meg.

$$(9) \quad v_1 = -\frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}; \quad v_2 = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}; \quad v_3 = 0$$

A B pont és az u egyenes t távolsága (4) alapján $d(B, u) = u_1 b_1 + u_2 b_2 - u_3 b_3 = sht$ azaz (8) – ből következően

$$(10) \quad -\frac{a_2 b_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} + \frac{a_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = sht$$

tehát az u alapegyenesű B ponton áthaladó $t(B, u)$ távolságvonal egyenlete (5)

$$(11) \quad u_1 x_1 + u_2 x_2 = -\frac{a_2 b_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} + \frac{a_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \text{ azaz (8)}$$

$$(12) \quad -\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} x_1 + \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} x_2 = -\frac{a_2 b_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} + \frac{a_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

rendezve

$$(13) \quad -a_2 x_1 + a_1 x_2 = -a_2 b_1 + a_1 b_2$$

Analóg módon a $t(A, v)$ távolságvonal egyenlete

$$(14) \quad -b_2 x_1 + b_1 x_2 = -a_2 b_1 + a_2 b_2$$

A két távolságvonal egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása a C metszéspont:

$$(15) \quad -a_2 x_1 + a_1 x_2 = -a_2 b_1 + a_1 b_2$$

$$-b_2 x_1 + b_1 x_2 = -a_2 b_1 + a_2 b_2$$

$$\text{azaz } x_1 = a_1 + b_1 \text{ és } x_2 = a_2 + b_2$$

$C(a_1 + b_1, a_2 + b_2, x_3)$ (1) ebből következően a C metszéspont koordinátái:

$$(16) \quad C(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \sqrt{1 + (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2})$$

Ezután algebrailag is definiálhatunk egy $\oplus$ binér műveletet a hiperbolikus sík pontjai felett.

$$(17) \quad A(a_1, a_2, a_3)$$

$$B(b_1, b_2, b_3)$$

$$A \oplus B = C$$

$$C(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \sqrt{1 + (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2})$$

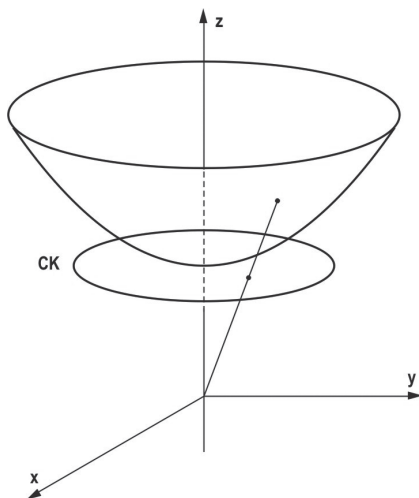
Könnyen belátható, hogy a lineáris algebrai vektorösszeadáshoz hasonlóan ez az algebrai struktúra is egy kommutatív csoport, amelyben a neutrális elem $O(0, 0, 1)$ és az $X(x_1, x_2, x_3)$

ellentett eleme pedig $-X(-x_1, -x_2, x_3)$. Észrevehető, hogy az összeadás definíciójában a harmadik koordináták nem szerepelnek.

3. Általánosítás

A hiperbolikus sík forgáshiperboloid modelljében a pontokat $X(x_1, x_2, x_3)$ módon adjuk meg, ahol $x_3^2 - x_2^2 - x_1^2 = c^2$ és az $x_3 \geq c$. Ha $Y(y_1, y_2, y_3)$ egy másik pont, akkor az

(18) $X \oplus Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \sqrt{c^2 + (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2})$ művelettel pontthalmaz feletti kommutatív csoportot definiálunk $O(0,0,c)$ neutrális elemmel és $-X: (-x_1, -x_2, x_3)$ ellentett elemmel, amit $(H, \oplus, 0)$ rendezett hármassal jelölünk. A hiperboloid modell és a Cayley–Klein-modell (CK) izomorfiaja alapján ez a struktúra átvihető egy c sugarú nyílt körlemezre.



2. ábra

A modellek ábrája

Forrás: a szerző szerkesztése

A forgás hiperboloid az $Oxyz$ derékszögű, jobb sodrású euklidészi koordináta-rendszerben a $z^2 - y^2 - x^2 = c^2$ egyenlettel és a $z > 0$ feltétellel adott felület.

A Cayley–Klein-modell (CK) egy c sugarú, az Oxy síkkal párhuzamos, nyílt körlemez, amely középpontjával a forgáshiperboloidot annak $O(0,0,c)$ csúcsában érinti. Az izomorfiaát eredményező bijektív leképezés a két modell között pedig az a vetítés, amelynek sugarai áthaladnak az $Oxyz$ origóján (2. ábra). A CK-modellről a hiperboloid felületre történő vetítést gamma-, az inverz bijekciót pedig deltavetítésnek nevezzük.

4. Pont vetítése a CK-modellről a hiperboloidra (gammavetítés)

A CK-körlemezen levő $A(a_p, a_z, c)$ pont $Oxyz$ -beli helyzetvektorát γ skalárral szorozzuk úgy, hogy a $(\gamma a_p, \gamma a_z, \gamma c)$ vektor végpontja a hiperboloidon legyen, tehát (1) alapján

$$\gamma^2 c^2 - \gamma^2 a_z^2 - \gamma^2 a_p^2 = c^2$$

Ha felhasználjuk az $a_1^2 + a_2^2 = |a|^2$ jelölést, ami az $a(a_p, a_z)$ kétdimenziós vektor intenzitásának négyzete, akkor

(19) $\gamma_a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|a|^2}{c^2}}}$ az a vektor Lorentz-faktora, tehát az $A(a_p, a_z, c)$ pont vetülete kifejezhető a $\gamma_a a$ skalárral való szorzással, ahol a harmadik koordináta (1) alapján az első kettőtől függ. Ez a projekció a gammavetítés.

5. Pont vetítése a hiperboloidról a CK-körlemezre (deltavetítés)

A hiperboloid modell $X(x_p, x_z, x_3)$ pontját vetítjük a CK-körlemezre az X pont $Oxyz$ -beli helyzetvektorának δ skalárral történő szorzásával úgy, hogy $\delta(x_p, x_z, x_3) = (\delta x_p, \delta x_z, \delta x_3)$ vektor végpontja a CK-körlemezen legyen mint képpont, azaz $\delta x_3 = c$. Ebből következik, hogy $\delta = \frac{c}{x_3}$, tehát a képpontot a $(\frac{cx_1}{x_3}, \frac{cx_2}{x_3}, c)$ koordináták határozzák meg. Az első két koordináta

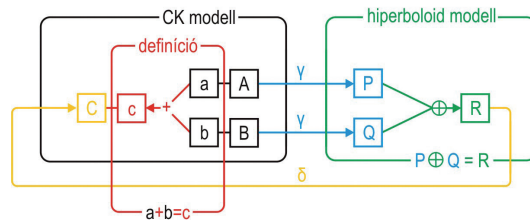
$(\frac{cx_1}{x_3}, \frac{cx_2}{x_3}) = \frac{c}{x_3}(x_1, x_2)$ a CK-n lévő képpont helyzetvektorát adja, ahol $x = (x_1, x_2)$. A gammavetítéshez hasonlóan a deltavetítésnél is egy

(20) $\delta_x = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{|x|^2}{c^2}}}$ funkcionál lesz. Tehát az $X(x_p, x_z, x_3)$ pont delta elnevezésű vetítéssel a CK-körlemez vektorának végpontjába kerül.

6. A $(H, \oplus, 0)$ izomfiája a CK feletti Abel-csoporttal

Az A és B a CK-modell két pontja, amelyek helyzetvektorai ebben a modellben rendre a és b . A gammavetítéssel és $\gamma(A) = P$ és $\gamma(B) = Q$. A hiperboloid modellben $P \oplus Q = R$. A deltavetítéssel $\delta(R) = C$, amely pont CK-beli helyzetvektora c .

Definíció: $a + b = c$ (3. ábra).



3. ábra

A két modell izomfiája

Forrás: a szerző szerkesztése

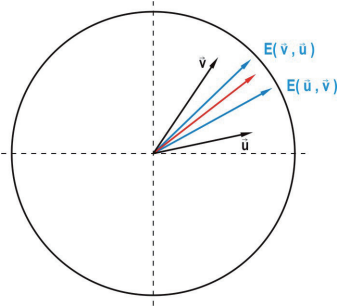
Ennek alapján két tetszőleges, origó kezdőpontú $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ CK-beli vektort gammavetítéssel $\gamma_u \mathbf{u}$ és $\gamma_v \mathbf{v}$ szintén origó kezdőpontú, irányított egyenesszakaszra vetítjük, és a hiperboloidon definiált összegüket

(21) $L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \gamma_u \mathbf{u} + \gamma_v \mathbf{v}$ lineáris kombinációval jelöljük. A 3. ábra alapján az $L(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ vektort, végpontját a deltavetítéssel

(22) $H(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \delta_{L(\mathbf{u}, \mathbf{v})} L(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ vektorra (végpontjára) vetítjük, ami a 3. ábra alapján izomorfiával a hiperboloidról leképezi az Abel-csoportot a CK-modellre.

Ugyanezt a definíciót alkalmazhatjuk a c sugarú nyílt gömb középponti kezdőpontú $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ kötött vektorok összeadására is. Ha az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ Einstein-összegét $E(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ -vel jelöljük, akkor

(23) $E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} \left\{ \mathbf{u} + \frac{1}{\gamma_u} \mathbf{v} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_u}{1 + \gamma_u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} \right\}$ kifejezést kapjuk. Ezek után a számítástechnika segítségével ábrázolhatjuk az egyszerűség kedvéért az xy síkból tetszőlegesen választott $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ megengedett sebességeket, különböző $E(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $E(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ és $H(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ összegeiket.



4. ábra

Az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok és összegeik méretarányos ábrája

Forrás: a szerző szerkesztése

1. táblázat

A 4. ábrán lévő vektorok intenzitása és hajlásszöge

	$r \ (r \cdot c)$	$\alpha \ [^\circ]$ (az x-hez viszonyítva pozitív)
$\mathbf{u}$	0,72	12°
$\mathbf{v}$	0,82	56°
$E(\mathbf{u}, \mathbf{v})$	0,96	29°
$E(\mathbf{v}, \mathbf{u})$	0,96	44°
$H(\mathbf{u}, \mathbf{v})$	0,92	38°

Forrás: a szerző szerkesztése

7. Összegzés

A hiperbolikus geometria alkalmazása a relativisztikus sebességek összeadásában című írás először definiál (megszerkeszt) egy kommutatív csoportot a hiperbolikus sík kötött (O kezdőpontú) vektorainak halmazán. Mivel a hiperbolikus sík hiperboloid modellje izomorf a Cayley-Klein (CK) kör modellel, ez lehetővé teszi a CK-modellen is a kötött vektorok kommutatív csoportjának definiálását. Bármely két különböző kötött vektort a CK-modellből felvetítünk a hiperboloid modellre, ott összeadjuk a hiperbolikus modell csoportművelete szabályai szerint, majd az eredőt visszavetítjük a CK-modellre. Ezután definiáljuk a CK-modell két kiinduló vektorának eredőjét, mint a visszavetített vektort. Az így definiált struktúra a CK-modellen szintén kommutatív csoport. A két modell közötti bijektív leképezés alapján izomorf csoportok. A körmodell csoportstruktúrája a lineáris algebra ismert eszközeivel könnyen átalakítható az euklidészi tér egy c sugarú nyílt gömb belső struktúrájává. Az írásban szereplő vektorösszeadás is az operandus vektorok lineáris kombinációja, és az Einstein-összeg is az, ezért mivel az Einstein-féle összeadás nem kommutatív, mindhárom eredő ugyanabban a síkban helyezkedik el. A végén egy tetszőleges operandus páron grafikusán is ábrázoljuk a különböző eredményeket.

Felhasznált irodalom

- G. HORVÁTH Á. – SZIRMAI J. (2004): *Nem euklideszi geometriák modelljei*. Budapest, Typotex Kiadó.
- SZÁSZ P. (1973): *Bevezetés a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometriába*. Budapest, Akadémiai Kiadó.
- UNGAR, A. A. (2004): A hiperbolikus geometria alkalmazása a relativisztikus fizikában. *Bolyai-emlékkönyv – Bolyai János születésének 200. évfordulójára*. Budapest, Vincze kiadó.
- VARIČAK, V. (1910): Anwendung der Lobatschefschijschen Geometrie in der Relativtheorie. *Physikalische Zeitschrift*, Vol. 11. 93–96.